

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, Neamț

07.02.2026

Barem de notare și evaluare

Clasa a VIII-a

**Subiectul 1 (22,5 puncte)**

- a)(12p) Arătați că pentru orice  $k \in \mathbb{N}^*$  are loc:  $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ .
- b)(10,5p) Fie suma  $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Să se arate că  $\frac{1}{2} \cdot S_{2025} \in (\sqrt{2026} - 1; 45)$ .

**Soluție și barem:**

$$\text{a)} \quad \left. \begin{array}{l} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} \\ k > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 2\sqrt{k(k+1)} - 2k < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{k^2+k} < 2k + 1 \quad 6p$$

$$1 \Leftrightarrow 4(k^2+k) < (2k+1)^2 \quad (A), \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \\ k > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 < 2k - 2\sqrt{k(k-1)} \Leftrightarrow 2\sqrt{k^2-k} < 2k - 1 \Leftrightarrow 4(k^2-k) < (2k-1)^2 \quad (A), \forall k \in \mathbb{N}^* \quad 6p$$

- b) În inegalitatea demonstrată la punctul a), îi dăm valori lui  $k$ : 6p

$$k = 1: \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$k = 2: \sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \sqrt{2} - 1$$

$$k = 3: \sqrt{4} - \sqrt{3} < \frac{1}{2\sqrt{3}} < \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

... ..

$$k = 2025: \sqrt{2026} - \sqrt{2025} < \frac{1}{2\sqrt{2025}} < \sqrt{2025} - \sqrt{2024}$$

Însumând relațiile de mai sus, obținem:

$$\sqrt{2026} - 1 < \frac{1}{2} S_{2025} < \sqrt{2025} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot S_{2025} \in (\sqrt{2026} - 1; 45) \quad 4,5p$$

**Subiectul 2 (22,5 puncte)**

- a) (6,5p) Să se demonstreze că pentru orice  $a, b, c$  și  $d$  numere raționale are loc:

$$a \cdot \sqrt{5} + b \cdot \sqrt{2} = c \cdot \sqrt{5} + d \cdot \sqrt{2} \text{ dacă și numai dacă } a = c \text{ și } b = d.$$

- b) (16p) Să se determine numerele raționale  $a$  și  $b$  care verifică egalitatea:

$$a \cdot \sqrt{7+2\sqrt{10}} - \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{21-\sqrt{360}} = 3 \cdot \sqrt{5} + 7 \cdot \sqrt{2}.$$

**Soluție și barem:**

- a) Implicația inversă:  $a = c$  și  $b = d$  1p

Implicația directă: presupunem prin reducere la absurd că  $b \neq d$  și egalitateadevine  $\frac{c-a}{b-d} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ , contradicție! 4pDeci,  $b = d$ , înlocuind în egalitate se obține și  $a = c$ . 1,5p

$$b) \sqrt{7 + 2 \cdot \sqrt{10}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

3p

$$\sqrt{21 - \sqrt{360}} = \sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

3p

$$\text{Ecuația devine: } a \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2}) - \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 3 \cdot \sqrt{5} + 7 \cdot \sqrt{2}$$

4p

$$(a - b) \cdot \sqrt{5} + (a + b) \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{5} + 7 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ a + b = 7 \end{cases}$$

3p

$$a = 5 \text{ și } b = 2$$

3p

### **Subiectul 3 (22,5 puncte)**

Fie cubul  $ABCD A'B'C'D'$ ,  $O$  centrul feței  $ABCD$  și  $O'$  centrul feței  $BCC'B'$ . Se știe că aria triunghiului  $DO'B$  este  $\sqrt{3}$ cm.

a) (5p) Aflați lungimea laturii cubului.

b) (8,5p) Demonstrați că planele  $(OCB')$  și  $(A'C'D)$  sunt paralele.

c) (9p) Calculați cosinusul unghiului dintre dreptele  $DO'$  și  $A'B$ .

**Soluție și barem:**

$$a) A_{DO'B} = \frac{1}{2} \cdot A_{DBC'}, \Delta DBC' \text{ echilateral} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DB^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

3p

$$DB = 2 \cdot \sqrt{2}, \text{ iar } DB \text{ este diagonală în pătratul } ABCD \Rightarrow l = 2 \text{ cm}$$

2p

b) Dacă  $Q$  este punctul de intersecție dintre  $A'C'$  și  $B'D'$ , avem  $QB' = DO$ ,  
 $QB' \parallel DO \Rightarrow DOB'Q$  paralelogram. Deci,  $B'O \parallel DQ$ ,  $DQ \subset (A'DC')$

5p

$A'C' \parallel AC \Rightarrow AO \parallel A'Q$ ,  $A'Q \subset (A'DC')$ . Deci,  $(OCB') \parallel (A'C'D)$

3,5p

c)  $\sphericalangle (DO', A'B) = \sphericalangle (DO', QO') = \sphericalangle DO'Q$ , deoarece  $QO'$  linie mijlocie în  
triunghiul  $A'C'B \Rightarrow QO' \parallel A'B$

3p

În triunghiul  $DO'Q$ , isoscel,  $DQ = DO' = \sqrt{6}$  și  $QO' = \sqrt{2}$

3p

$$\text{În triunghiul } DO'Q \text{ ducem } DS \perp QO', \cos(\sphericalangle DO'Q) = \frac{\frac{QO'}{2}}{DO'} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

3p

### **Subiectul 4 (22,5 puncte)**

Pe planul triunghiului dreptunghic  $ABC$ , cu unghiul drept în  $A$ , cu  $AB = c$ ,  $BC = a$  și  $AC = b$ , se ridică perpendiculara  $AM$ , cu  $AM = m$ . Fie  $D \in BC$  astfel încât  $\frac{CD}{DB} = \frac{b^2}{c^2}$ .

a) (10p) Dacă  $AT$  este perpendiculară pe  $MD$ , unde  $T \in MD$ , determinați măsura unghiului dintre dreptele  $AT$  și  $BC$ .

$$b) (12,5p) \text{ Demonstrați că } d(A, (MBC)) \leq \sqrt{\frac{mbc}{2a}}.$$

**Soluție și barem:**

$$a) \frac{CD}{DB} = \frac{b^2}{c^2} \Rightarrow \frac{CD}{CD+DB} = \frac{b^2}{b^2+c^2} \xrightarrow{\Delta ABC \text{ dr. în } A} \frac{CD}{a} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow CD \cdot BC = AC^2$$

Reciproca T.Cat.

$$\xrightarrow{\text{Reciproca T.Cat.}} AD \perp BC$$

$$\left. \begin{array}{l} MA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow MA \perp BC \text{ și } AD \perp BC \text{ (subpunctul a))} \quad 5p$$

$$\text{Cum } MA \cap AD = \{A\} \text{ și } MA, AD \subset (MAD), \text{ rezultă că } BC \perp (MAD) \Rightarrow BC \perp AT \Rightarrow \sphericalangle(BC, AT) = 90^\circ \quad 5p$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} AT \perp BC \\ AT \perp MD \\ BC \cap MD = \{D\} \\ BC, MD \subset (MBC) \end{array} \right\} \Rightarrow AT \perp (MBC) \Rightarrow d(A, (MBC)) = AT \quad 2p$$

$$AD \text{ este înălțime în } \triangle ABC \text{ dreptunghic în } A \Rightarrow AD = \frac{bc}{a}.$$

$$\left. \begin{array}{l} MA \perp (ABC) \\ AD \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow MA \perp AD \Rightarrow MD^2 = MA^2 + AD^2 \Rightarrow MD = \frac{\sqrt{m^2 a^2 + b^2 c^2}}{a} \quad 2p$$

$$AT \text{ este înălțime în } \triangle MAD \text{ dr.} \Rightarrow AT = \frac{AM \cdot AD}{MD} = \frac{m \cdot \frac{bc}{a}}{\frac{\sqrt{m^2 a^2 + b^2 c^2}}{a}} = \frac{mbc}{\sqrt{m^2 a^2 + b^2 c^2}} \quad 4,5p$$

Din inegalitatea mediilor, se obține

$$m^2 a^2 + b^2 c^2 \geq 2mabc \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m^2 a^2 + b^2 c^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2mabc}}. \quad 2p$$

Dacă înmulțim ultima inegalitate cu  $mbc$ , obținem:

$$AT \leq \frac{mbc}{\sqrt{2mabc}} = \sqrt{\frac{mbc}{2a}} \quad 2p$$